

1) Najděte všechny maximální řešení rovnice:

$$y' = 2\sqrt{y}$$

1. Otázka má $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 2$, $I = D_h = \mathbb{R}$

2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, dostáváme jedno singulární řešení $y(x) = 0$.

3. Označme $J = (0, \infty)$. Pak g je spojité
a nenulové na J .

4. Hledáme g s hodnotami v J . Pak platí

$$\frac{g'(x)}{g(g(x))} = h(x).$$

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{c}{=} 2\sqrt{x}, \quad \int 2 \stackrel{c}{=} 2x$$

Dostáváme $2\sqrt{f(x)}' = 2x + c$, kde
 c je nějaká konstanta.

5. $J = (0, \infty)$, $G(J) = (0, \infty)$.

Tedy pro fixní c dostáváme podmínku

$$2x + c > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{c}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{c}{2}, \infty\right).$$

Dostáváme řešení $f_c(x) = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2$, $x \in \left(-\frac{c}{2}, \infty\right)$
pro $\forall c \in \mathbb{R}$.

6. Fixujme $c \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow -\frac{c}{2}^+} f_c(x) = 0$.

Jeliž existuje stac. řešení $f(x) = 0$,
dostáváme max. řešení

$$f_{c,n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\frac{c}{2}] \\ (x + \frac{c}{2})^2, & x \in (-\frac{c}{2}, \infty) \end{cases}$$

Proložte $\forall$ řešení f_c je det na levém
 oholí $+\infty$, male zli jsme všech na x
 řešení.

$$2) \quad f'(x) = f(x) \cdot x$$

$$1. \quad g(x) = x, \quad h(x) = x, \quad I = D_f = \mathbb{R}$$

$$2. \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ dostáváme stáe. } f(x) = 0.$$

$$3. \quad J_1 = (-\infty, 0), \quad J_2 = (0, \infty) \quad \text{jsou max. int.}$$

Důležité, že g je ne ních spojitá ne nulová.

4. Hledáme y s hodnotami v J_1, J_2 .

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x,$$

$$\int \frac{1}{x} dx \stackrel{c}{=} \log|x|, \quad \int x dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} x^2$$

$$\text{Dostáváme} \quad \log|y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$5. \quad \text{Fixado } c \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} G(J_1) &= \mathbb{R} \\ G(J_2) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Pro } \forall c \in \mathbb{R} \text{ je } \frac{x^2}{2} + c \in \mathbb{R} \text{ sempre pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exists \gamma(x) \in J_1 \text{ se } |\gamma| = -\gamma, \text{ e d}_\gamma$$

$$\log(-\gamma(x)) = \log |\gamma(x)| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\gamma(x) = -\exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right).$$

Dostáváme řešení $y_{c,1}(x) = -\exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right), x \in \mathbb{R}$

pro $\forall c \in \mathbb{R}$

Z $y(x) \in J_2$ dostáváme $|y| = y$ a tedy

řešení $y_{c,2}(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right), x \in \mathbb{R}.$

6. Všechna male zenci řešení jsou zřejmě max.

$$3) \quad y'(x) = x \cdot \sqrt{y(x)}$$

$$1. \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x, \quad I = D_h = \mathbb{R}$$

$$2. \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{i.e. máme stac. řešení } y(x) = 0.$$

$$3. \quad J = (0, \infty) \quad \text{je max. int. kde } g \text{ je spoj. a nenulová.}$$

4. Hledáme γ s hodnotami v J , pat

$$\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{\gamma(x)}} = x \quad \text{i.e.}$$

$$2\sqrt{\gamma(x)} = \frac{x^2}{2} + C$$

5. $G(J) = (0, \infty)$. Tedy pro fixní c dostáváme podmínku $\frac{x^2}{2} + c > 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{(*)} > -2c$

Pokud je $c > 0$, pak (*) je splněna
pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pokud je $c \leq 0$, pak (*) je ekvivalentní
 $x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \cup (\sqrt{-2c}, +\infty)$

Dostáváme řešení:

- $f_c(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c}{2}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R} \text{ pro } \forall c > 0$
- $f_{c1}(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c}{2}\right)^2, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \text{ pro } \forall c \leq 0$
- $f_{c2}(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{c}{2}\right)^2, \quad x \in (\sqrt{-2c}, +\infty) \text{ pro } \forall c \leq 0$

6. Nachher $c \leq 0$, falls

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{-2c}^-} f_{c1}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{-2c}^+} f_{c2}(x) = 0$$

Takže toto řešení lze sčít se

stacionárním řešením $y(x) = 0$.

Dostáváme maximální řešení :

- $y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

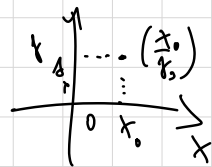
- $y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c}{2} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall c > 0$

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c}{2}\right)^2 & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty) \end{cases} \quad \text{pro } \sqrt{c} = 0$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c}{2}\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-2c}, +\infty) \end{cases} \quad \text{II}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c_1}{2}\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c_2}{2}\right)^2 & x \in (\sqrt{-2c_2}, +\infty) \end{cases}$$

pro $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$



7. Kvalitativní analýza:

Bodem $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jde o stacionární řešení,

mohou být mnohá nestacionární řešení (všechna jsou
konstantní na $[x_0, \infty)$)

Obdobně mohou existovat řešení.

Body $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $y_0 < 0$ neprochází zénem Fokemí.

Necht $y_0 > 0$, zénem $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Pak chceme

nejít čarou $y_0 = \left(\frac{x_0^2}{4} + \frac{c}{2} \right)^2$

i.e. $\sqrt{y_0} = \left| \underbrace{\frac{x_0^2}{4} + \frac{c}{2}}_{(*)} \right|$, což jsou 2 možnosti:

$$(*) < 0 : \sqrt{x_0} = -\frac{x_0^2}{4} - \frac{c}{2} \quad \text{i.e. } C = -\frac{x_0^2}{2} - 2\sqrt{x_0} < 0$$

$$\sqrt{-2c} = \sqrt{x_0^2 + 4\sqrt{x_0}} > |x_0| \quad \text{i.e. } x_0 \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c})$$

∧ tedy toto c nemá řešení

$$(*) > 0 : \sqrt{x_0} = \frac{x_0^2}{4} + \frac{c}{2} \quad \text{i.e. } C = -\frac{x_0^2}{2} + 2\sqrt{x_0}$$

$$C > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} > \frac{x_0^2}{2} \Leftrightarrow x_0 > \frac{x_0^4}{16}.$$

V tom prípade bodu $m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ prechádza
práve jedno riešenie.

$$\text{Potom } y_0 \leq \frac{x_0^2}{4}, \text{ pak } c \leq 0,$$

$$\sqrt{-2c} = \sqrt{x_0^2 - 4y_0} < |x_0| \text{ i.e.}$$

$$x_0 \in (-\infty, -\sqrt{-2c}) \cup (\sqrt{-2c}, \infty).$$

Postaviť v ňom práve jedno $c \leq 0$;

$\delta_{C,(\Delta)}$ prochází z $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} (\Delta) = 1 & \text{pokud } \operatorname{sgn}(x_0) = -1 \\ (\Delta) = 2 & \text{pokud } \operatorname{sgn}(x_0) = 1 \end{pmatrix}$

Existuje nekonečně mnoho řešení,

všechny jsou s hodnotami v $(-\infty, 0]$, právě jedno z nich je monotónní.